

# $H^1$ und BMO

Ziele 1) Dualität zwischen  $H^1$  und BMO  
spielt Rolle von  $L^1$     spielt Rolle von  $L^\infty$

- 2) Size-Eigenschaften von BMO: (John, Nirenberg) Die  $L^2$ -Ungleichungen, die BMO definieren, implizieren ähnliche  $L^p$ -Abschätzungen  $\forall p < \infty$  und implizieren damit exponentielle Schranken
- 3) Sharp-Funktion:  $f \mapsto f^\#$  ist eine V&A nichtlineare Version des Maximaloperators. Man zeigt:

Dualitäts-Umkehrung (i)  $f^\# \in L^\infty \Leftrightarrow f \in BMO$   
(ii)  $L^2$ -Kontrolle  $\Rightarrow$  entsprechende Eigenschaft von  $f$   
(iii) Sei  $T$  ein singulärer Integraloperator.  $f^\#$  erlaubt uns  $Tf$  punktwise durch  $f$  zu kontrollieren

- 4) Verbindungen zu Quadratfunktionen: Charakterisierung von BMO durch Carleson-Maße  
 $\rightarrow$  Anwendungen: (i)  $L^2$ -Ungleichungen für allgemeine Calderón-Zygmund-Operatoren  
(ii) Existenz einer quasi-orthogonalen Entwicklung/Herstellung von BMO-Funktionen  
 $\hookrightarrow$  siehe auch Entwicklungen in Wavelets (auch Curvelets!)

5) Interpolation von Operatoren: Singuläre Integraloperatoren sind  $\mathcal{H}$  nicht mit  $L^1$  bzw  $L^\infty$  kompatibel  $\Rightarrow$  verwende  $H^1$  bzw BMO

## 1 Der Raum der Funktionen mit beschränkter mittlerer Oszillation - BMO

1.1 So wie  $H^1$   $L^1$  ersetzt hat, wird BMO  $L^\infty$  ersetzen.

Definition  $f \in L^1_{loc}$  bzw ist genau dann in BMO, wenn  $\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leq A \forall$  Kugeln  $B$  wobei  
 $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$ . D.h. die mittlere Oszillation von  $f$  über jede Kugel  $B$  ist beschränkt.  
 $\|f\|_{BMO} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx$  ist die Norm von BMO

# Bemerkungen über BMO-Funktionen:

1) Konstanten sind die Null-Elemente in  $\| \cdot \|_{BMO}$ , d.h. BMO-Funktionen sind nur bis auf eine Konstante definiert.  $f$  wäre immer noch in BMO, wenn man statt  $f_0$  irgendeine Konstante  $c_0$  schreibt; denn, wäre  $|c_0 - f_0| < A \Rightarrow \|f\|_{BMO} \leq 2A$  mit der  $\Delta$ -Vgl.  
 Man erhält also äquivalente Definitionen von BMO, wenn man die Familie der Kugeln durch andere Objekte, z.B. Würfel ersetzt.

2)  $f \in BMO$  ist klar, doch die Umkehrung  $BMO \subseteq C_0^\infty$  ist i.A. falsch! nimm z.B.  $f(x) = \log|x|$   
 Dazu: für  $\delta > 0$  ist mit  $f(x)$  auch  $f(\delta x)$  in BMO mit gleicher Norm.  $\log|x|$  wird dadurch nur um eine Konstante  $-\log|\delta|$  verändert. Sei nun  $B_{2^k}$  eine um  $x_0$  zentrierte Kugel, dann gilt:  
 $\int_B |\log|x|| dx \leq A$  für  $|k| \leq 1$ ,  $\int_B |\log|x| - \log|\delta x|| dx \leq A$  für  $|k| \geq 1$

$\Rightarrow$  Auch  $\log|P(x)| \in BMO$  für  $P$  ein Polynom auf  $\mathbb{R}^n$

ist  $w \in A_p$  ( $A_p$ -Gewicht)  $\Leftrightarrow \log w \in BMO$

3) Der Raum der reellwertigen BMO-Funktionen bildet ein Gitter, d.h. sind  $f, g \in BMO$   
 $\Rightarrow \max(f, g), \min(f, g) \in BMO$ .

Dies folgt aus:  $|f - g| \geq |f| - |g| \Rightarrow$  wenn  $f \in BMO$ , dann auch  $|f| \in BMO$ .

4) BMO-Funktionen sind "fast beschränkt": (später genauer)

5)  $f \in BMO \Rightarrow f(x)(1+|x|)^{-n-1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , d.h. Poisson-Integrale von BMO-Funktionen sind wohldefiniert.

Beweis: Per Definition von BMO ist  $\int_{B_{2^k}(0)} |f(x) - f_{B_{2^k}(0)}| dx \leq A 2^{nk} \|f\|_{BMO}$ , ~~aber~~ und analog  
 $\hookrightarrow$  Kugel mit Radius  $2^k$  um  $\bar{0}$ .  
 $\int_{B_{2^{k+1}}(0)} |f(x) - f_{B_{2^{k+1}}(0)}| dx \leq A 2^{n(k+1)} \|f\|_{BMO}$

$$\Rightarrow |f_{B_{2^{k+1}}(0)} - f_{B_{2^k}(0)}| \leq A \|f\|_{BMO} \Rightarrow |f_{B_{2^k}} - f_{B_1}| \leq ck \|f\|_{BMO} \quad \forall k > 0$$

$$\Rightarrow \int_{B_{2^k}} |f - f_{B_1}| dx \leq ck 2^{nk} \|f\|_{BMO} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{B_1}| (1+|x|)^{-n-1} dx \leq c \|f\|_{BMO} \quad \square$$

mit Gewicht multiplizieren, skalieren,  $k \rightarrow \infty$

$\downarrow$   
 $f(x)(1+|x|)^{-n-1} \in L^1$

## 1.2 Dualität von $H^1$ und BMO

(2)

$l(g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx$  konvergiert für allgemeine  $f \in BMO$ ,  $g \in H^1$  nicht absolut

$\Rightarrow$  definiere  $l(g)$  für  $g$  in einer geeigneten dichten <sup>lineare</sup> Teilmenge von  $H^1$ . Der Bequemlichkeit halber nehmen wir  $H^1_a$ .

Definition  $H^1_a$  ist der Unterraum aller endlichen Linearkombinationen von  $H^1$ -Atomen  
 $\Leftrightarrow H^1_a$  ist der Unterraum aller  $g \in H^1$ , die ~~beschränkt~~ zusätzlich  $g \in C_{c,b}$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 0$  erfüllen.

Für  $g \in H^1_a$  konvergiert  $l(g)$  und die Beliebigkeit von  $f$  (sprich, die additive Konstante) verschwindet, da  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 0$ .

Satz 1 a) Sei  $f \in BMO$ . Dann gibt es eine auf  $H^1$  beschränkte Erweiterung von  $l(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx$ , ursprünglich auf  $H^1_a$  definiert. Die Erweiterung erfüllt zudem  $\|l\| \leq c \|f\|_{BMO}$ .

(Riesz'scher Darstellungssatz) b) Umgekehrt kann jedes lineare Funktional  $l: H^1 \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $l(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx$  für ein  $f \in BMO$  realisiert werden und es gilt  $\|f\|_{BMO} \leq c \|l\|$

## 1.3 John-Nirenberg-Ungleichung

Im Beweis von Satz 1 sieht man, dass  $f \in BMO$  sogar  $\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^2 dx \leq c'$  erfüllt, d.h. es gibt entsprechende Ungleichungen, die  $\forall p < \infty$  gelten. Außerdem gibt es einen kritischen Fall, der exponentielle Integrierbarkeit von  $f$  enthält.

Korollar Sei  $f \in BMO$ , dann:

a) Sei  $p < \infty$ , dann ist  $f \in L^p_{loc}$  und es gilt  $\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^p dx \leq c_p \|f\|_{BMO}^p \quad \forall$  Kugeln  $B$

b) Es gibt  $c_1, c_2 > 0$ , sodass  $\forall \alpha > 0$  und  $\forall$  Kugeln  $B$  gilt:

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}| \leq c_1 \exp(-c_2 \alpha \|f\|_{BMO}^{-1}) \cdot |B|$$

(multipliziere mit  $\alpha^{p-1}$  und integriere...?)

$\rightarrow$  ~~höhere~~ Schranke d. <sup>maximalen</sup> Oszillation  $\rightarrow$  wird umso schärfer, je größer  $\alpha$  und je kleiner  $\|f\|_{BMO}$  am Volumen <sup>minimalen</sup>

## 2 Die Sharp-Funktion

Definition Sei  $f \in L^1_{loc}$ .  $f^\#(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| dy$

Lemma

Korollar:  $f \in BMO \Leftrightarrow f^\# \in L^\infty$  (beschränkt)

$\Rightarrow$  Wichtige Eigenschaften von  $f$  lassen sich einfacher durch  $f^\#$  ausdrücken.

$\rightarrow$  Fragen: - Was passiert, wenn  $f^\# \in L^p$ ?

- Wie drückt sich die Dual  $H^1$ -BMO-Dualität durch  $f^\#$  aus?

Sei  $\mathcal{F}$  eine fixe, endliche Familie von  $\mathcal{F}$ -Halbnormen,  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$

Behauptung Seien  $g \in H^1$ ,  $f$  beschränkt. Dann gilt die Dualitätsungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \right| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f^\#(x) \mathcal{M}(g)(x) dx$$

Satz 2 Sei  $1 < p < \infty$ , dann gilt:

a)  $f^\#(x) \leq \mathcal{M}(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$

Maximalungleichung

b)  $\|f^\#\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^p}$

c)  $\|f\|_{L^p} \leq c' \|f^\#\|_{L^p}$

### 3 Elementarer Zugang und eine dyadische Version

Ziel · Dyadische Versionen der Maximal- und Sharpfunktion herleiten

#### 3.1 Dyadische Maximalfunktion

Definition (Mesh/Network) Sei  $k \in \mathbb{N}$ , dann bezeichne  $M_k$  die Familie von abgeschlossenen Würfeln der Kantenlänge  $2^{-k}$  und deren Ecken Gitterpunkte der Form  $(\frac{m_1}{2^k}, \dots, \frac{m_n}{2^k})$  für  $m_j \in \mathbb{Z}$  sind

$\{M_k\}$  heißt die Familie von Netzwerken

Bemerkungen 1)  $M_k = 2^{-k} M_0$ , wobei  $M_0$  das Netzwerk der Einheitswürfel ist deren Ecken ganze Zahlen im Koordinatenraum sind.

2) Jeder Würfel in  $M^k$  erzeugt  $2^n$  Würfel in  $M^{k+1}$ , indem man nur ihn entlang seiner Seiten halbiert.

Definition 1) Ein Würfel, der zu einem dieser Netzwerke gehört heißt dyadischer Würfel

2)  $\bigcup_k M_k$  ist die Familie aller dyadischen Würfel

3) Zwei dyadische Würfel  $\left\{ \begin{array}{l} \text{schnitten sich genau dann, wenn sich ihre Interiors schneiden} \\ \text{sind genau dann voneinander disjunkt, wenn ihre " " voneinander disjunkt sind} \end{array} \right.$

Definition (Dyadischer Maximaloperator)  $(M^{\Delta} f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$  sup über alle dyadischen Würfel

Haupteigenschaft der dyadischen Maximalfunktion (Basis der kleinsten Calderón-Zygmund-Zerlegung)

Lemma 1 Sei  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha > 0$  konstant sei, dann die Menge  $\Omega_{\alpha} = \{x : (M^{\Delta} f)(x) > \alpha\}$  endliches  $\mathbb{R}^n$ -mässige Menge

Calderón-Zygmund Maß hat.

Dann lässt sich  $\Omega_{\alpha}$  als disjunkte Vereinigung dyadischer Würfel darstellen und es gilt:

$$(i) \alpha < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n \alpha \quad \forall Q_j$$

Daraus folgt: (ii)  $|f(x)| \leq \alpha$  für fast alle  $x \in \Omega_{\alpha}$   $x \in \bigcup_j Q_j$  (die "gute" Menge)  $\neq g \cap \bigcup_j Q_j$   $g = \{x \in \mathbb{R}^n : \int_{Q_j} |f(x)| dx < \alpha |Q_j|\}$

$$\text{und } |\Omega_{\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha} \int |f(x)| dx$$

Bemerkungen 1) Der Beweis hängt nur von einfachen Inklusionseigenschaften der dyadischen Würfel ab

$\Rightarrow (i), (ii)$ , erste Kgl. von (i) und (ii) sind auch für allgemeine Martingale wahr

2) Ist  $Q_0$  ein fixer dyadischer Würfel und  $\text{supp } f \subseteq Q_0$ ,  $x_0 = |Q_0|^{-1} \int_{Q_0} f(x) dx \stackrel{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$  Ist  $\alpha \geq x_0$ , so sind die Würfel  $Q_j$  alle in  $Q_0$  enthalten, dh die durch das Lemma garantierte Zerlegung findet nur in  $Q_0$  statt

3) Für  $\alpha_1 > \alpha_2$  ist  $\{x: (M^{\alpha_1} f)(x) > \alpha_1\} \subset \{x: (M^{\alpha_2} f)(x) > \alpha_2\}$  und wegen der Maximalität der Würfel ist jeder Würfel der " $\alpha_1$ -Zerlegung" in W einem dyadischen Würfel der " $\alpha_2$ -Zerlegung" enthalten.

### 3.2 Dyadische Sharp-Funktion

Definition  $f_{\Delta}^{\#}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy$

Relation zwischen  $f_{\Delta}^{\#}$  und  $M^{\alpha} f$  durch eine typische relative distributionelle Ungleichung

$$|\{x: (M^{\alpha} f)(x) > \alpha, f_{\Delta}^{\#}(x) \leq c\alpha\}| \leq 2^{n+1} c |\{x: (M^{\alpha} f)(x) > \frac{\alpha}{2}\}|$$

### 3.3 Relative distributionelle Ungleichungen

Ziel Zeige  $\int (F(x))^p dx \leq \int (G(x))^p dx$  für  $F, G \geq 0$

- z.B. wahr, wenn  $F(x) \leq c_1 G(x) + c_2 F(x)$  mit  $c_2 < 1, c_1 > 0$
- oft haben wir aber keine solchen punktweise Schranken, sondern  $\mu\{x: F(x) > \alpha\} \leq c_1 \mu\{x: G(x) > \frac{\alpha}{c_2}\} \forall \alpha > 0$  mit freien  $c_1, c_2 > 0$

Definition Relative distributionelle Ungleichung  $\mu\{x: F(x) > \alpha; G(x) \leq c\alpha\} \leq a \mu\{F(x) > b\alpha\} \forall \alpha > 0$ , wobei  $a, b, c$  geeignete Konstanten sind

Lemma 2 Seien  $F, G \geq 0$  und erfüllen obige relative distributionelle Ungleichung. Angenommen, es gibt ein  $0 < p < \infty$ , so daß  $\|F\|_{L^p} < \infty$

Dann gilt  $\int (F(x))^p dx \leq A(a, b, c, p) \int (G(x))^p dx$ , wenn  $a < b^p$  ist.

$$A(a, b, c, p) = \frac{c^{-p}}{(1 - ab^{-p})}$$

Beweis Schreibe  $\|F\|_{L^p}^p = \int_0^\infty \alpha^{p-1} \mu\{x: F(x) > \alpha\} d\alpha$  und beachte, dass die relative distributionelle Ungleichung  $\mu\{x: F(x) > \alpha\} \leq a \mu\{x: F(x) > b\alpha\} + \mu\{x: G(x) > c\alpha\}$  impliziert. Multipliziert man beide Seiten mit  $p \cdot \alpha^{p-1}$  und integriert, so erhält man nach ~~dem~~ Scaling, dass  $\|F\|_{L^p}^p \leq ab^{-p} \|F\|_{L^p}^p + c^{-p} \|G\|_{L^p}^p$ . Für  $\|F\|_{L^p}^p < \infty$  und  $ab^{-p} < 1$  kann erlöcht man die gewünschte Ungleichung mit  $A(a,b,c,p) = \frac{c^{-p}}{1-ab^{-p}}$  □

Bemerkung Für  $b \leq 1$  (ist der Fall bei den kommenden Anwendungen), kann man die Bedingung  $\|F\|_{L^p}^p < \infty$  durch  $\|F\|_{L^{p_0}}^p < \infty$  für ein  $p_0 \leq p$  abschwächen.

Beweis Sei  $I_R = \int_0^R \alpha^{p-1} \mu\{x: F(x) > \alpha\} d\alpha$  und per Voraussetzung ist  $I_R < \infty \forall R > 0$ . Mit der selben Vorgehensweise wie oben erhält man

$$I_R \leq ab^{-p} I_{Rb} + c^{-p} \|G\|_{L^p}^p$$

Da  $b \leq 1$ , ist  $I_{Rb} \leq I_R$ , womit  $I_R \leq A \|G\|_{L^p}^p$ . Die Behauptung folgt, wenn man den Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  nimmt.

Gegenbsp, wenn  $\|F\|_{L^{p_0}}^p < \infty$  nicht erfüllt wird und die Behauptung falsch ist:  $\mathbb{R}^1$ :  $F(x) = |x|^{-1}$ ,  $d\mu = dx$ ,  $G(x) \equiv 0$ .

### 3.4 Die $f^\#$ und $M^a f$ verbindende Ungleichung

Behauptung - Sei  $f \in L^a$ ,  $1 > b > 0$ ,  $c > 0$ . Dann gilt:

$$|\{x: (M^a f)(x) > \alpha, f_0^\#(x) \leq c\alpha\}| \leq \alpha |\{x: (M^a f)(x) > b\alpha\}| \quad \forall \alpha > 0 \text{ mit } a = \frac{2^a c}{1-b}$$

Korollar 1 Sei  $f \in L^a$  mit  $f_0^\# \in L^p$  für ein  $1 < p < \infty$ . Ist auch  $f \in L^{p_0}$  für ein  $p_0 \leq p \Rightarrow f \in L^p$  und es gilt  $\|M^a f\|_{L^p} \leq A_p \|f_0^\#\|_{L^p}$  mit  $A_p = \frac{c^{-p}}{1-ab^{-p}} = 2(2^{a/c} \cdot 2^p)^p$

Bemerkung Das Korollar ist stärker als  $\|f\|_{L^p} \leq A_p \|f_0^\#\|_{L^p}$  aus zwei Gründen.

- 1)  $f_0^\# \in c f^\#$ , doch  $f_0^\#$  kann auch wesentlich kleiner als  $f^\#$  sein, z.B. in  $\mathbb{R}^1$  mit  $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$   
 $\rightarrow f_0^\#$  ist beschränkt und verschwindet für  $x < 0$ , wohingegen  $f^\#(x) \approx c |x|^{-1}$
- 2) Erkennt man sich an  $M^a f \approx |f|$ , erhält man eine weitere Verbesserung nahe 1, da  $A_p$  auch für  $p \rightarrow 1$  beschränkt bleibt.

### 3.5 Distributionelle John-Nirenberg-Ungleichung (exp. Schranke an Volumen, wo die ~~von~~ <sup>maximale</sup> Oszillation-sumplizität $\alpha$ ist)

- stärker als die ursprüngliche Ungleichung da sie lokalisiert und auf dyadische Würfel eingeschränkt ist.

Korollar 2 Sei  $f$  eine auf einem dyadischen Würfel  $Q_0$  gegebene, integrierbare Funktion.  
 Sei weiter  $f \in BMO(Q_0)$  im Sinne, dass  $\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq A \quad \forall$  dyadischen  $Q \subseteq Q_0$ .

Dann gibt es  $c_1, c_2 > 0$ , sodass  $\forall \alpha > 0$ :  

$$|\{x \in Q_0 : |f(x) - f_{Q_0}| > \alpha\}| \leq c_1 e^{-c_2 \alpha} |Q_0|$$

### 4 Weitere Eigenschaften von BMO

- Ziel: viele singuläre Integrale bilden  $L^\infty$  auf BMO (wie damals  $H^1$  auf  $L^1$ ) ab
- diese Folgerung kann man durch punktweise Abschätzungen an Sharp-Funktionen darstellen
  - Verbindung zwischen Quadratfunktionen und Orthogonalität zu BMO.

#### 4.1 Singuläre Integrale

• Translationsinvariantes,  $L^2$ -beschränkter <sup>linearer</sup> singulärer Integraloperator  $T$  mit <sup>distributionellem</sup> Kern  $K$  bzw. Fourier-Multiplikator  $m$

•  $K$  ist abseits des Ursprungs lokal integrierbar und  $\int_{|x|>|y|} (K(x,y) - K(x,0)) dx \leq A \quad \forall y \neq 0$

$\rightarrow T f(x) = \int K(x-y) f(y) dy$  für kompakt getragenes  $f$  und  $x \notin \text{supp}(f)$

- $\rightarrow \widehat{Tf} = m \widehat{f}$
- $\rightarrow \|Tf\|_2 \leq A \|f\|_2$
- $\rightarrow \int_{|x|>|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq A \quad \forall y \neq 0$

$\Rightarrow T$  kann auf  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) beschränkt fortgesetzt werden, für  $p=1$  gibt es ein weak-type-Resultat  
 $T: H^1 \rightarrow L^1$  bzw. sogar  $T: H^1 \rightarrow H^1$  ist ebenfalls eine beschränkte Erweiterung



Von zur Erweiterung von  $T$  auf  $L^\infty$ :

Definition (Dualer Operator  $\tilde{T}$ )

$\tilde{T}$  hat Fourier-Multiplikator  $\tilde{m}(\xi) = \overline{m(-\xi)}$   
distributionellen Kern  $\tilde{K}(x) = \overline{K(-x)}$

$\Rightarrow \tilde{T}$  ist (bis auf komplexe Konjugation) der auf dem Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  adjungierte Operator von  $T$  für den  $\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\tilde{T}g)(x)dx \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt.

$\Rightarrow \tilde{T}$  bzw.  $\tilde{K}$  erfüllen die selben Beschränktheits- bzw. relativen Abfallbedingungen

$\Rightarrow$  Durch den dualen Operator  $\tilde{T}$  lässt sich  $Tf$  für  $f \in L^\infty$  definieren und es ist

~~$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$~~   $\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\tilde{T}g)(x)dx$  bis auf eine additive Konstante.

Darüberhinaus ist  $Tf \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ !

von Definition Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine fixierte Kugel.  $L_B^2 = \{f \in L^2: f \text{ hat Träger in } B\}$   
 $L_{B,0}^2 = \{f \in L_B^2: \int f(x)dx = 0\}$

Behauptung 1 verstanden als Erweiterung auf  $L^\infty$  durch den Dualen  $\tilde{T}^n$   
Korollar Sei  $f \in L^\infty \Rightarrow Tf \in L_{B,0}^2$  und  $Tf$  kann global (bis auf eine additive Konstante) definiert werden.  
2)  $\|Tf - (Tf)_B\|_{L^2(B)} \leq c \|f\|_{L^\infty} |B|^{1/2} \Rightarrow \|Tf\|_{B,0} \leq A' \|f\|_{L^\infty}$  , d.h.  $T$  ist  $L^\infty \rightarrow B,0$ -beschränkt (hängt nur von  $A$  ab)

Beweis Sei  $g \in L_{B,0}^2 \Rightarrow g \in H_0^1$  mit  $\|g\|_{H^1} \leq c |B|^{1/2} \|g\|_{L^2}$ , d.h. insbesondere kann man ~~das~~ den Ausdruck  $\int (Tf)(x)g(x)dx = \int f(x)(\tilde{T}g)(x)dx$  ~~erweitern~~ auf  $L_{B,0}^2$  stetiges, lineares Funktional  $\ell$  definieren, das  $\|\ell\| \leq c A \|f\|_{L^\infty} |B|^{1/2}$  erfüllt. ( $\tilde{T}$  ist  $H^1 \rightarrow L^1$ -beschränkt mit  $\|\tilde{T}\| \leq cA$ )  
 $\Rightarrow$  für jede Kugel  $B$  ~~besteht~~ <sup>ist</sup>  $Tf$  als Element aus  $L_{B,0}^2$  definiert und mit dem gleichen Argument wie für die Dualität von  $H^1 \rightarrow B,0$  ist  $Tf$  auch ~~erst~~ global auf ganz  $\mathbb{R}^n$  bis auf eine additive Konstante definiert. (2) analog.  $\square$

Bemerkung Man kann dies auch ohne Verwendung von Dualität, aber mit Hilfe der Sharp-Funktion zeigen.  
 Mit diesem ~~alternativen~~ Argument kann sogar  $T: BMO \rightarrow BMO$  gezeigt werden.

Beweis Sei  $f \in L^\infty$  kompakt getragen (die Größe des Trägers wird jedoch keine Rolle spielen!)  
 Da per Voraussetzung auch  $f \in L^2$ , können wir mit der ursprünglichen Definition von Tf arbeiten.  
 Für eine Kugel  $B$  sei  $B^*$  ihr Doppeltorus und zerlege  $f = f \chi_{B^*} + f \chi_{B^c} = f_1 + f_2$  d.h.  
 $Tf = Tf_1 + Tf_2$ . Dann haben wir für  $Tf_1$ :

$$\int_B |Tf_1| dx \stackrel{Cauchy}{\leq} |B|^{1/2} \|Tf_1\|_{L^2} \leq A |B|^{1/2} \|f_1\|_{L^2} \leq A \cdot 2^{n/2} |B|^{1/2} \|f\|_{L^\infty}$$

Einkreisbild  $\rightarrow B$

Für  $Tf_2$  benutzen wir den relativen Abfall von  $K$  mit  $c_B := \int_{B^*} K(x_0 - y) f(y) dy$ , wobei  $x_0$  der Mittelpunkt von  $B$  sei.

$$\Rightarrow |(Tf_2)(x) - c_B| = \left| \int_{B^*} [K(x-y) - K(x_0-y)] f(y) dy \right| \leq A \|f\|_{L^\infty} \quad \text{für } x \in B$$

$$\Rightarrow \text{zusammen: } \frac{1}{|B|} \int_B |(Tf)(x) - c_B| dx \leq (2^{n/2} + 1) A \|f\|_{L^\infty} \quad \square \text{ (für kompakt getragene } f)$$

mit  $f^*(x) := \sup_{B(x,r)} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_0| dy$

## 4.2 Die Sharp-Funktion

Definition (strengere Maximalfunktion) Sei  $0 < \alpha < \infty$ ,  $f \in L^r_{loc}$ .  $M_\alpha f := [M(|f|^\alpha)]^{1/\alpha}$

Korollar Für  $0 < \alpha < \infty$ ,  $f \in L^r_{loc}$  ist  $Mf \in M_\alpha f$  (Hölder)

Der singuläre Integraloperator soll nun statt  $\int |K(x-y) - K(x)| dx \leq A \forall y \neq 0$  die schärfere, punktweise

Bedingung  $|K(x-y) - K(x)| \leq A \frac{|y|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \quad \forall |x| \geq 2|y|$  für ein  $\alpha > 0$  erfüllen.

Behauptung 2 Sei  $T$  obiger singulärer Integraloperator mit schwächerer relativer Abfallbedingung und  $\alpha > 1$ .

Dann  $(Tf)^\#(x) \leq A_\alpha (M_\alpha f)(x) \quad \forall f \in L^p$  mit  $r \leq p < \infty$ .

$\Rightarrow$  Punktweise Schranken an "gemittelte" Werte  $\#$  von  $Tf$  durch  $p$ -Normen von  $f$   
 $\rightarrow$  viel stärker als die üblichen  $L^p$ -Ungleichungen

Beweis Sei  $B$  eine um  $x_0$  zentrierte Kugel, die  $\bar{x}$  beinhaltet. Dann müssen wir nur eine Konstante  $c_B$  finden, so daß  $\frac{1}{|B|} \int_B |(Tf)(x) - c_B| dx \leq A_r (M_r f)(\bar{x})$  ist  
 $f^{\#}(\bar{x}) = \sup_{B \ni \bar{x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx$  ↳ nur von  $r, A$  abhängig (6)

Sei wieder  $B^*$  die doppelte Kugel von  $B$ ,  $f = f|_{B^*} + f|_{B^*} = f_1 + f_2$

Da  $T$   $H^1 - L^1$ -beschr. ist, ist  $T$   $L^r$ -beschränkt  $\forall r \geq 1$ , weshalb

$$\int_B |(Tf_1)(x)| dx \stackrel{\text{holder}}{\leq} |B|^{1-\frac{1}{r}} \left( \int_B |Tf_1|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq |B|^{1-\frac{1}{r}} A_r \|f_1\|_{L^r} \stackrel{\text{holder}}{=} |B| A_r \left( \frac{1}{|B|} \int_{B^*} |f|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq c |B| (M_r f)(\bar{x})$$

Für  $x \in B, y \in B^*$  gibt die schärfere relative Abfallbedingung

$$|K(x-y) - K(x_0-y)| \leq A \frac{t^\gamma}{|\bar{x}-y|^{n+\gamma}}, \text{ wobei } \gamma > 0, t = \text{Radius}(B)$$

Mit  $c_B := \int_{B^*} K(x_0-y) f(y) dy$  erhält man für  $x \in B$

$$|(Tf_2)(x) - c_B| \leq \int \bar{\Phi}_t(\bar{x}-y) |f(y)| dy, \text{ wobei } \bar{\Phi}_t(u) = t^{-n} \bar{\Phi}\left(\frac{u}{t}\right) \text{ und } \bar{\Phi}(u) = A u^{-n-\gamma} \chi_{|u| \leq 1}$$

$$\leq A (M_r f)(\bar{x}) \stackrel{\text{holder}}{\leq} A (M_r f)(\bar{x}) \quad \square$$

### 4.3 Zusammenhang mit Carleson-Maßen und Quadratfunktionen

Definition (Quadratfunktionsoperatoren)

$$(S_{\bar{\Phi}} f)(x) := \left( \int_0^\infty |f * \bar{\Phi}_t(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \quad (S_{\bar{\Phi}} f)(x) := \left( \int_{\Gamma} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\Phi}_t(x-y) f(y) dy \right|^2 \frac{d\mu(y,t)}{t^{n+1}} \right)^{1/2} \quad \Gamma = \{(y,t) : |y| \leq t\}$$

Lemma  $\|S_{\bar{\Phi}} f\|_{L^2} \leq A \|f\|_{L^2}, \|S_{\bar{\Phi}} f\|_{L^2} \leq A' \|f\|_{L^2}$   $A, A'$  nur von  $\bar{\Phi}$  abhängig

Definition Sei  $\bar{\Phi} \in \mathcal{S}$ , dann heißt  $\bar{\Phi}$  genau dann nicht-entartet, wenn es  $\Psi \in \mathcal{S}$  mit  $\int \Psi(x) dx = 0$  gibt,

so daß  $\int_0^\infty \bar{\Phi}_t * \Psi_t \frac{dt}{t} = \delta$ , wobei die linke Seite durch  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^\infty \bar{\Phi}_t * \Psi_t \frac{dt}{t}$  im  $\mathcal{S}'$ -Sinne

definiert ist.

⇒ Nicht-entartete Quadratfunktionen  $S_{\bar{\Phi}}, S_{\bar{\Phi}}$

Bemerkung Die Bedingung für Nicht-Entartetheit ⇒ Gültigkeit der umgekehrten Version von der  $L^2$ -Abschätzung  
 $\|S_{\bar{\Phi}} f\|_{L^2} \leq A \|f\|_{L^2}$ , sprich  $\|f\|_{L^2} \leq A' \|S_{\bar{\Phi}} f\|_{L^2}$

⇒  $\bar{\Phi}$  verschwindet auf keinem Strahl, der durch den Ursprung verläuft

⇒  $\bar{\Phi}$  ist radial und verschwindet nicht identisch

Wir wissen bereits, dass  $S_{\Phi}$  und  $S_{\Phi}^{-1}$   $L^p$ - und  $H^1 \rightarrow L^1$ -beschränkt sind ( $1 < p < \infty$ )

Ist  $\Phi$  nicht entartet, so gibt es in diesen Fällen auch umgekehrte Ungleichungen  $\|f\|_{L^1} \leq A \|S_{\Phi} f\|_{L^1}$  (wegen  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Phi(y) \frac{dx dy}{|x-y|} = 1$ )

Folgt aus (die Umkehrung  $S_{\Phi}: L^{\infty} \rightarrow BMO$  ist klar)

Frage: Ist  $S_{\Phi} f \in L^{\infty}$ , wenn  $f \in BMO$ ? Nein! Aber:

$$C(d_{\mu})(x) = \sup_{B(x)} \frac{1}{|B|} \int_B |d_{\mu}|$$

Carleson-Maß  $\|d_{\mu}\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} C(d_{\mu})(x)$   
 $e \Rightarrow d_{\mu}$  heißt Carleson-Maß, wenn  $\|d_{\mu}\|_C < \infty$

Satz 3 Sei  $\Phi \in \mathcal{S}$  mit  $\int \Phi = 0$

a) Sei  $f \in BMO$  und  $d_{\mu} := |f + \Phi_t|^2(x) \frac{dx dt}{t}$

$\Rightarrow d_{\mu}$  ist ein Carleson-Maß, d.h.  $\sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^n \\ t > 0}} \frac{1}{|B|} \int_{T(B)} |f + \Phi_t(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \leq \|d_{\mu}\|_C < \infty$

mit  $\|d_{\mu}\|_C \leq c \|f\|_{BMO}^2$ ,  $T(B) = \{(x,t) : |x-x_0| \leq r-t, t \in [r, 2r]\}$  (Zelt). Insbesondere ist damit  $\sup_{t>0} \|f + \Phi_t\|_{L^{\infty}} \leq A \|f\|_{BMO}$

b) Ist umgekehrt  $\Phi$  nicht entartet,  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+1}} dx < \infty$  und  $d_{\mu} = |f + \Phi_t(x)|^2 \frac{dx dt}{t}$  ein Carleson-Maß,

so ist  $f \in BMO$  mit  $\|f\|_{BMO}^2 \leq c \|d_{\mu}\|_C$

Einheits-Disc-Maß an der Stelle  $t=2$

Wichtig  
 Korollar Sei  $\Phi \in \mathcal{S}$ ,  $\int \Phi = 0$ ,  $f \in BMO$  und  $d_{\mu} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f + \Phi_{2^j}(x)|^2 dx \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{dt}{t} \Rightarrow d_{\mu}$  ist ein Carleson-Maß

(diskrete Version)  
 mit  $\|d_{\mu}\|_C \leq c \|f\|_{BMO}^2$

4.4 Wertige Qualitätsungleichung  $\rightarrow$  bzgl. dyadischer Würfel

4.4 Quasiorthogonale Entwicklungen von BMO-Funktionen

Kenntnisse über Quadratfunktionen kann man ausbringen, wenn man

Studium der Quadratfunktionen bezieht Eigenschaften der Funktionen ein, die mit Orthogonalität zu tun haben

Ziel Äquivalente Charakterisierung von BMO-Funktionen durch orthogonale Zerlegungen

$\rightarrow$  Verfeinerungen dieser Ideen führen auf die Theorie von Wavelets und Waveletzerlegungen

Notation  $Q$ ... dyadischer Würfel

$B = B_Q$ ... Kugel mit Zentrum = Zentrum von  $Q$  und doppeltem Durchmesser, d.h.  $Q \subset B_Q$

$B_j$  Kugel von  $Q_j$

Zu jedem  $Q$  gibt es eine Funktion  $\phi_Q$  mit

- $\text{supp } \phi_Q \subset B_Q$
- $\|D^k \phi_Q\| \leq \frac{|Q|^{-k}}{|Q|^{n/2}}$   $0 \leq k \leq n$  ( $|Q|$ ... Länge einer Seite von  $Q$ ) (Regulartäts- und Cancellationsbedingungen können abgeschwächt werden)
- $\int x^\alpha \phi_Q(x) dx = 0$   $0 \leq |\alpha| \leq n$

Behauptung Sei  $f$  eine Funktion, die sich durch  $f = \sum_Q a_Q \phi_Q$  darstellen lässt, wobei  $\{a_Q\}$  eine geeignete Familie von Koeffizienten ist und die Summe über alle dyadischen Würfel in  $\mathbb{R}^n$  läuft.

a) Erfüllt  $\{a_Q\}$  die Bedingung  $\sum_{Q \in Q_0} |a_Q|^2 \leq A |Q_0|$   $\forall Q_0$  dyadischer Würfel  $\Leftrightarrow f = \sum_Q a_Q \phi_Q \in \text{BMO}$

Dann ist  $f = \sum_Q a_Q \phi_Q \in \text{BMO}$  im Sinne, dass  $\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p_2 \rightarrow \infty}} \sum_{p_1 \leq |Q| \leq p_2} a_Q \phi_Q = f$  in der

(schwach- $\ast$ -Top.) schwachen BMO-Topologie (BMO aufgefasst als Dualraum von  $H^1$ )

b) Sei umgekehrt  $f \in \text{BMO} \Rightarrow \exists$  Familien  $\{a_Q\}$  und  $\{b_Q\}$ , die obige Bedingungen und  $\sum_{Q \in Q_0} |a_Q|^2 \leq A |Q_0|$   $\forall$  dyadischen  $Q_0$  erfüllen, sodass  $f$  durch  $\sum_Q a_Q \phi_Q$ , im Sinne

$\lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p_2 \rightarrow \infty}} \sum_{p_1 \leq |Q| \leq p_2} a_Q \phi_Q$  (schwach- $\ast$ -Grenzwert), darstellbar ist.

Das kleinste  $A$ , für das  $\sum_{Q \in Q_0} |a_Q|^2 \leq A |Q_0|$  gilt ist mit  $\|f\|_{\text{BMO}}^2$  vergleichbar.

Bemerkungen 1) Es gibt ähnliche Charakterisierungen für  $L^p(\mathbb{R}^n)$  bzw. sogar  $H^p(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} \phi_{\alpha} = f \in H^p \Leftrightarrow \tilde{f}(x) := \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |a_{\alpha}|^2 |\alpha|^{-1} \right)^{1/2} \in L^p$$

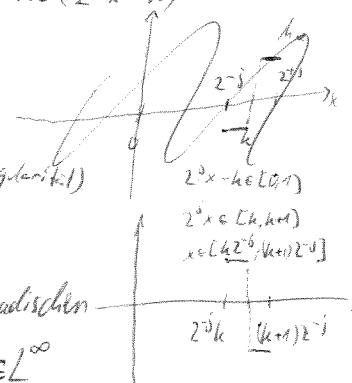
2) Haar-Basis: eine vereinfachte Version der Familie  $\{\phi_{\alpha}\}$

Angenommen wir sind im  $\mathbb{R}^1$ , 
$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei  $Q$  ein dyadisches Intervall, dann setzen wir  $h_Q = 2^{j/2} h(2^j x - k)$

„  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \Rightarrow |h_Q| \leq |Q|^{-1/2}, \int h_Q dx = 0$

( $\int x h_Q dx \neq 0$ , keine Regularität)



Riesz  $\Rightarrow h_{\alpha}$  bilden eine ONB für  $L^2(\mathbb{R}^n)$

Für  $f = \sum a_{\alpha} h_{\alpha}$  ist:  $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |a_{\alpha}|^2 \leq A |Q_0| \|f\|^2 \Leftrightarrow f \in BMO$  im dyadischen Sinne, d.h.  $f_{\Delta}^{\#} \in L^{\infty}$

$$[f_{\Delta}^{\#} \in BMO \Rightarrow f \in BMO]$$

3) Es ist möglich Familien  $\{\phi_{\alpha}\}$  mit den geforderten Regularitäts- und cancellation-Eigenschaften zu konstruieren, die dann eine ONB von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bilden

$n=1$ :  $\{\phi_{\alpha}\}$  sind die dyadischen Dilatierten und ganzzahlig Translatierten einer einzelnen Funktion  $\phi$  (wie eben  $h_{\alpha}$  von  $h$ )

$\rightarrow$  dieses System (und seine Verallgemeinerungen) nennt man Wavelet-Zerlegung!

# 5 Ein Interpolationsresultat für lineare $L^p$ -beschränkte Operatoren

(8)

Ziel: Gegeben ist eine analytische Familie von Operatoren.

Kennt man eine Anfangsbedingung  $f$  bestimmte  $L^p$ -Beschränkungen (z.B.  $p=2$  und  $p=\infty$ )

$\Rightarrow L^p$ -Beschränktheit  $\forall 2 < p < \infty$

$\Rightarrow$  Scharfe Schranken für große Klassen von Operatoren

• Mittel: BMO als Ersatz für  $L^\infty$ .

## Motivation

### 5.1 Motivation

Betrachte das gleichmäßige Lebesguemaß  $\nu$  auf  $S^{n-1}$  (Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$ ), sodass es Masse 1 hat.

Zu betrachtender Operator:  $T: f \mapsto f * ds$  (kommt z.B. bei der Wellengl. vor  $\partial_t^2 u = \Delta u$  in  $\mathbb{R}^2$   $\frac{u(x,0)=f(x)}{\partial_t u(x,0)=0}$ )

$$(f * ds)(x) = \int_{S^n} f(x-y) ds(y) = \int_{|x-y|=1} f(y) ds(y) \quad \text{Mittelwert } f \text{ über die um } x \text{ zentrierte Kugel}$$

Frage:  $L^p$ -Beschränktheit von  $T$  für welche  $p$ ?

$\Rightarrow$  klar:  $\|f * ds\|_p \leq \|f\|_{L^p}$ ,  $\|ds\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ , da  $ds$  auf 1 normiert war.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (Hölder-Ungl.)

es geht aber noch mehr: für  $p=2$  kann gezeigt werden (s.h. oszillierende Integrale erster Art),

$$\text{dass } |\hat{f}(\xi)| \leq A |\xi|^{-(n-1)/2} \Rightarrow f \mapsto \partial_x^k f * ds \text{ ist } L^2\text{-beschränkt für } |k| \leq \frac{n-1}{2}$$

$$\left( \int_{S^n} |\hat{f}(\xi)| \cdot |\xi|^{-(n-1)/2} \right)$$

oder besser:  $U_\gamma(y) := (-\Delta)^{\gamma/2} (f * ds)$  ist für  $0 \leq \gamma \leq \frac{n-1}{2}$   $L^2$ -beschränkt

$\Rightarrow$  Erwartung durch Interpolation zw.  $p=2$  und  $p=\infty$  ( $L^2$  u.  $L^\infty$ ):  $U_\gamma$  ist  $L^p$ -beschränkt, wenn  $0 \leq \gamma \leq \frac{n-1}{p}$  und  $2 \leq p \leq \infty$

Bemerkungen zum Beweis • Man braucht Abschätzungen für  $(-\Delta)^{\gamma/2}$  mit  $\gamma \in \mathbb{R}$

• solche Operatoren sind durch Marcinkiewicz-Multiplikatoren gegeben und bilden zwar nicht  $L^\infty \rightarrow L^\infty$ , doch  $L^\infty \rightarrow \text{BMO}$  ab!

z.B.  $h(y) = e^{\gamma^2}$

• multipliziere  $U_\gamma$  mit einer holomorphen Funktion  $h(y)$ , über den polynomiellen Zerfalls von  $\|(-\Delta)^{\gamma/2}\|_{L^\infty \rightarrow \text{BMO}}$  ( $\gamma = it, t \in \mathbb{R}, t \rightarrow \pm \infty$ )

kontrolliert ab schwächt  
• dann setze  $1-s = \frac{2\gamma}{n-1}$

## 5.2 Das Resultat

Hypothesen (H1) Sei  $S := \{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1\}$  der abgeschlossene Streifen in der komplexen  $s$ -Ebene und  $T_s : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in S$

(H2)  $T_s$  ist in  $s$  holomorph im Sinne, dass  $s \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_s f) g dx$  ist in  $S$  stetig und im Interior von  $S$  sogar analytisch  $\forall f, g \in L^2$ .

(H3)  $T_s$  ist  $\forall s \in S$  uniform beschr., d.h.  $\exists M > 0$  s.d.  $\|T_s\|_{L^2, L^2} \leq M \quad \forall s \in S$

Dies ist jedoch eine a-priori Abschätzung, d.h. das Resultat wird nicht von  $M$  abhängen.

(H4) (Schlüsselannahme) (i)  $\|T_{1+it}(f)\|_{L^2} \leq A \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2, -\infty < t < \infty$  und

(ii)  $\|T_{1+it}(f)\|_{B_{1/2}^0} \leq A \|f\|_{L^\infty} \quad \forall f \in L^2 \cap L^\infty, -\infty < t < \infty$

Satz 4 Unter den Annahmen (H1) bis (H4) ist  $\|T_\theta f\|_{L^p} \leq A_\theta \|f\|_p \quad \forall f \in L^p \cap L^2$ , für alle

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad \theta = 1 - \frac{2}{p} \quad (p \in [0, 1))$$

↳ von  $M$  unabh.  $\infty^2 p \geq 2$

## 5.3 Beweis: (wie bei $L^p$ -Beschränktheit)

Fixiere eine Funktion

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto B_x$$

so dass  $|B_x|$  von oben und unten beschränkt ist und

eine Funktion

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \eta_x(y)$$

mit  $|\eta_x(y)| \leq 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Die kommenden Abschätzungen werden nicht von diesen zwei Funktionen abhängen

Für  $s \in S, f \in L^2$  sei  $F^s := T_s f$  und mit  $F_\theta := \frac{1}{|B|} \int_B F$  definieren wir

$$U^s f(x) := \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} (F^s(y) - F_{\theta_x}^s) \eta_x(y) dy$$

Dann 1)  $\|U^s f(x)\| \leq (T_s f)^\#(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |(T_s f)(y) - (T_s f)_B| dy$  und

$$(2) \sup_{B, \theta_x} \|U^s f(x)\| = (T_s f)^\#(x)$$

$$2) \sup_{x \in B_x} \|U^s f(x)\| = (T_s f)^\#(x)$$



Als Erstes zeigen wir  $\|U^\theta f\|_{L^p} \leq A' \|f\|_{L^p}$  mit  $\theta = 1 - \frac{2}{p}$  für Treppenfunktionen  $f$ . (9)  
 O.B.d.A ist dabei  $\|f\|_{L^p} \leq 1$ . Dann ist

$$\|U^\theta f\|_{L^p} \leq A' \|f\|_{L^p} \Leftrightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} (U^\theta f)(x) g(x) dx \right| \leq A' \quad \text{für Treppenfunktionen } g \text{ mit } \|g\|_{L^p} \leq 1 \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Als Nächstes schreiben wir  $f = \sum_j a_j \chi_{E_j}$  ( $E_j \cap E_i = \emptyset$  ( $i \neq j$ )) und definieren

$$f_s := \sum_j |a_j|^{(1-s)p/2} \cdot \frac{a_j}{|a_j|} \chi_{E_j} \Rightarrow f_\theta = f, \text{ da } (1 - 1 + \frac{2}{p}) \cdot \frac{p}{2} = 1 \text{ und}$$

$$\text{außerdem } \|f_{it}\|_{L^2}^2 = \sum |a_j|^p \int \chi_{E_j}^2 = \sum |a_j|^p |E_j| = \|f\|_{L^p}^p \leq 1 \text{ und}$$

$$\|f_{i+it}\|_{L^p} \leq 1$$

Analog schreiben wir  $g = \sum b_n \chi_{E'_n}$  und definieren  $g_s = \sum |b_n|^{(1-s)p'/2} \frac{b_n}{|b_n|} \chi_{E'_n}$  und wir erhalten

$$\text{wie oben } g_\theta = g, \|g_{it}\|_{L^2} \leq 1 \text{ und } \|g_{i+it}\|_{L^p} \leq 1$$

$$\text{Nun definieren wir } I: S \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto I(s) := \int_{\mathbb{R}^n} U^s(f_s) g_s dx = \sum_{j,n} |a_j|^{(1-s)p/2} \frac{a_j}{|a_j|} |b_n|^{(1-s)p'/2} \frac{b_n}{|b_n|} \int (\chi_{E_j}^s(x) \chi_{E'_n}(x))$$

Wegen der Voraussetzungen\* und der Schranken an  $f_s, g_s$  ist klar, dass  $I(s)$  auf  $S$  stetig, im Interior analytisch und auf dem Streifen gleichmäßig beschränkt ist. Außerdem ist

$$|I(t)| \leq \|U^{it} f_{it}\|_{L^2} \|g_{it}\|_{L^2} \leq \|(\bar{T}_t f_t)^\# \|_{L^2} \leq c \|M(T_{it} f_{it})\|_{L^2} \leq c \|T_{it} f_{it}\|_{L^2} \leq \bar{A} \text{ und}$$

$$\text{ähnlich } |I(i+t)| \leq \bar{A}$$

$\Rightarrow$  Aus dem Drei-Linien-Theorem folgt dann  $|I(\theta)| \leq \bar{A} \Rightarrow \left| \int (U^\theta f)(x) g(x) dx \right| \leq A' \bar{A} \frac{\|U^\theta f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}}$

(Wir sehen, dass alle Abschätzungen tatsächlich nicht von  $\beta_i$  oder  $\eta_i$  abhängen)

$$\text{Mit } \sup_{\beta_i, \eta_i} |(U^s f)(x)| = (T_s f)^\#(x) \text{ gilt daher } \|(T_\theta f)^\# \|_{L^p} \leq \bar{A} \|f\|_{L^p}$$

Mit der umgekehrten Ungleichung  $\|f\|_{L^p} \leq A_p \|f^\#\|_{L^p}$  folgt daher die Behauptung für alle Treppenfunktionen  $f$

Für  $f \in L^2 \cap L^p$  gibt es wegen Dichteiät der Treppenfunktionen eine Folge von Treppenfunktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ , woraus die Behauptung für alle  $f \in L^2 \cap L^p$  folgt.

## 6 Weitere Ergebnisse

### A Eigenschaften von BMO

6.1 a) Sei  $P$  ein Polynom auf  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \log |P| \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$  und  $\|\log |P|\|_{\text{BMO}}$  hängt nicht von den Koeffizienten, sondern lediglich vom Grad  $d$  und der Raumdimension  $n$  ab.

b)  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad n_1 + n_2 = n$

Sind  $x^1 \mapsto f(x^1, x^2)$  und  $x^2 \mapsto g(x^1, x^2) \in \text{BMO}^r \Rightarrow f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$

6.2 Für  $f \in \text{BMO}, g \in H^1$  konvergiert das Integral  $\int fg dx$  nicht a priori, was wie folgt gesehen werden kann.

Sei  $g_0(r)$  ( $0 < r < \infty$ ) eine positive, fallende Funktion mit  $\int_0^\infty g_0(r) dr < \infty \Rightarrow g(x) = \text{sgn}(x) g_0(|x|) \in H^1_{loc}$

$\Rightarrow$  wähle  $g_0(r) = \begin{cases} r^{-1} \log(r-1)^{-1-\epsilon} & 0 < r < \frac{1}{2} \\ 0 & r > \frac{1}{2} \end{cases}$  und  $f(x) = \log |x| \Rightarrow \int_0^{1/2} dr \frac{r^{-1} \log r}{(\log r)^{1+\epsilon}} = \infty$  ( $0 < \epsilon < 1$ )

Um zu sehen, dass  $g \in H^1$ , setzen wir  $a_k(x) = \begin{cases} \frac{2^{-k-2}}{g_0(2^k)} g_0(|x|) \text{sgn}(x) & 2^k \leq |x| \leq 2^{k+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow a_k$  ist ein  $H^1$ -Atom ( $|a_k(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot (2^{k+1} - 2^k)} = \frac{1}{2^{k+1}}$  und  $\int a_k(x) dx = 1$ ) und

$g = \sum a_k$  mit  $a_k = g_0(2^k) 2^{k+2}$ , sowie  $\sum |a_k| \leq 8 \int_0^\infty g_0(r) dr$

Analoges gilt im  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\omega$  eine beschränkte, vom Grad 0 homogene Funktion mit

$\int_{|x|=1} \omega(x) d\sigma(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \omega(x) \frac{g_0(|x|)}{|x|^{n-1}} \in H^1(\mathbb{R}^n)$

### 6.3 Beispiele für BMO-Funktionen

(i)  $(I_n f)(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \log|x-y| f(y) dy$  für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

~~$I_n$~~   $I_n f = f * G_n$  mit  $\hat{G}_n(\xi) = (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-n/2}$

↳ Interpretation für gerade  $n$ : sei  $f \in L^1_{loc}$  mit  $\int \chi(k) |f(x)| (1+|k|)^{-n-1} dx < \infty$ , sowie  $\Delta^{n/2} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  im distributionellen Sinn

Dann ist  $f \in BMO$ .

Die nächsten vier Beispiele sind periodische Funktionen auf  $\mathbb{R}^1$

(ii) Sei  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$  mit  $|a_k| \leq k^{-1} \Rightarrow f \in BMO(\mathbb{R})$  } Fefferman

(iii)  $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i2^k x}$  mit  $\sum |a_k|^2 < \infty \Rightarrow f \in BMO$

(iv) Sei  $\sum b_n e^{inx} \in BMO$  mit  $b_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n e^{inx} \in BMO$ , wenn  $|a_n| \leq b_n$  (Fefferman)

(v) Sei  $P$  ein reellwertiges Polynom  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{iP(k)x}}{k} \in BMO$  (Stein und Wainger)

Singuläres Integral Sei  $Tf = K * f$  ein singuläres Integral, das die relative Abfallbedingung  $\int_{|x_2-y|}^{|x_1-y|} |K(x_1-y) - K(x_2-y)| dy \leq A \forall y \neq 0$  erfüllt, so wissen wir, dass  $T$  auf  $L^\infty$  erweiterbar ist und auf  $BMO$  abbildet

→ drei Verstärkungen dieses Ergebnisses

a)  $T$  muss dazu nicht translationsinvariant sein: so dazu  $T$  auf  $L^2$  beschränkt mit  $(Tf)(x) = \int K(x,y) f(y) dy \forall x \notin \text{supp}(f)$  und  $\int_{|y-x_0|/2}^{|y-x_1|/2} |K(x,y) - K(x_0,y)| dy \leq A \forall (x, x_0) \Rightarrow T^*$  bildet  $H^1$  auf  $L^1$  und  $T$  bildet  $L^\infty$  auf  $BMO$  ab

b) Ist  $T$  doch translationsinvariant, so ~~ist~~ ist er  $BMO$ -beschränkt (Peetre)

c) Analoges gilt für den Maximaloperator:  $f \in BMO \Rightarrow Mf \in BMO$  mit  $\|Mf\|_{BMO} \leq c (\|f\|_{BMO} + \|f\|_{BMO})$  (Bennet, DeVore, Sharpley)

$\|Mf\|_{BMO} \leq c (\|f\|_{BMO} + \|f\|_{BMO})$    
 ↳ Einheitskugel

### 6.4 Charakterisierung von BMO durch Riesztransformationen $R_j$

Ist  $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists f_0, f_1, \dots, f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , sodass  $f = f_0 + \sum_{j=1}^n R_j f_j$

Dies folgt aus der dualen Charakterisierung von  $H^1$  durch Riesztransformationen

( $f \in H^1 \Leftrightarrow R_j f \in L^1$  im Sinne, dass es  $\phi \in \mathcal{S}$  mit  $\int \phi = 1$ ,  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$  gibt, sodass  $\|f\|_{H^1} = \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^1} + \|\phi * f\|_{L^1}$ )

( $R_j f = K_j * f$  mit  $K_j = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ ,  $\hat{K}_j = i \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \underbrace{= \frac{\hat{K}_n}{|x|} + \frac{\hat{K}_j}{|x|} e^{-2\pi i x_j t}}_{\text{FT ist konjugierter Poissonkern}}$ )

### 6.5 Sei $f$ eine auf $\mathbb{R}^n$ definierte Funktion und $M_f$ der dazugehörige Multiplikationsoperator, d.h. $M_f \phi = f \phi$

Dann gilt:  $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$  die Kommutatoren  $[M_f, R_j]$  sind  $L^2$ -beschränkt  $\forall j=1, \dots, n$

(Coifman, Rochberg, Weiss)

### 6.6 Die BMO definierende Eigenschaft kann stark abgeschwächt werden:

(i) Sei  $p > 0$  und  $\exists \delta > 0$  und  $\exists \sup_B \int_B |f(x) - c_B|^p dx < \infty \Rightarrow f \in \text{BMO}$

(ii)  $\exists \gamma \in [0, \frac{1}{2})$  und  $\exists \lambda > 0$  sodass für alle Kugeln  $B$  gilt:  $|\{x \in B : |f(x) - c_B| > \lambda\}| \leq \gamma |B|$

$\Rightarrow f \in \text{BMO}$  mit  $\|f\|_{\text{BMO}} \sim \inf \{ \lambda : |\{x \in B : |f(x) - c_B| > \lambda\}| \leq \gamma |B| \}$  (John, Strömberg)

### 6.7 a) Seien $\Phi \in \mathcal{S}$ , $a \in L^\infty$ und $x \mapsto t(x)$ eine beliebige messbare Funktion (gestoppte Zeit)

$\Rightarrow f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} a(y) \Phi_{t(y)}(x-y) dy \in \text{BMO}$

b) Die Behauptung gilt auch für  $\sum_n \lambda_n \Phi_{t(y_n)}(x-y_n)$ , die diskretisierte Version. Hierbei ist  $\lambda_n \leq M$  und  $\sum_{B_n \in B^*} |B_n| \leq c |B|$   $\forall$  Kugeln  $B$  ( $B^*$  ist die Doppelte von  $B$  und  $B_n$  die Kugel um  $y_n$  mit Radius  $t(y_n)$ )

umgekehrte Richtung zu a)

c) Ist  $\Phi = 1 \Rightarrow f \in \text{BMO}$  kann durch  $f(x) = \int a(y) \Phi_{t(y)}(x-y) dy$  für geeignetes  $a \in L^\infty$  modulo einer  $L^\infty$ -Funktion dargestellt werden (es gibt auch eine Umkehrrichtung zu b))

"Beweis" a) folgt aus dem  $H^1$ -BMO-pairing

b) ähnlich und mit  $d\mu = \sum d\mu_n$  ist ein Carleson-Maß, wo  $d\mu_n$  die Einheitsmasse bei  $(y_n, t_n)$  ist.

c) gibt einen weiteren Beweis für die  $H^1$ -BMO-Dualität

## 6.8 Der Raum der VMO-Funktionen (vanishing mean oscillation)

(11)

$$f \in BMO \Leftrightarrow \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx < A$$

Definition  $f \in VMO \Leftrightarrow f \in BMO$  und  $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \text{oder } r \rightarrow \infty}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx = 0$  gleichmäßig

### Eigenschaften von VMO:

a) VMO ist der BMO-Abschluß von  $C_0$  (stetige Funktionen, die im  $\infty$  verschwinden)

b) Seien  $\Phi \in \mathcal{S}$ ,  $\int \Phi = 1$ ,  $f \in BMO$ , dann gilt:  $f \in VMO \Leftrightarrow f * \Phi_t \in C_0 \quad \forall t > 0$  und  $\|f - f * \Phi_t\|_{BMO} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

c) Sei  $T$  ein singulärer Integraloperator mit den üblichen Eigenschaften (translationsinvariant,  $L^2$ -beschränkt, relative Abfalligkeit, Existenz eines kleiner Schwartz-Kern)

Ist  $f \in C_0 \Rightarrow Tf \in VMO$

d) Das Pairing  $\int fg$  ( $f \in VMO, g \in H^1$ ) erlaubt es  $H^1$  als den Dualraum von VMO zu realisieren. (vgl. BMO ist der Dual von  $H^1$ ) ( $H^1 = VMO^*$ ,  $BMO = H^{1*} = VMO^{**}$ )

(Coifman, Wro)

## 6.9 BMO ist invariant unter linearen, invertierbaren Transformationen

Für  $n > 1$  ist der allgemeinste Homeomorphismus, der diese Eigenschaft besitzt, die quasikonforme Abbildung: sei  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma F$  die zugehörige Jakob-Matrix. Erfüllt  $F$  bestimmte Regularitätsbedingungen und  $\|\sigma F(x)\|^n \leq A |\det \sigma F(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  und

ist  $f \in BMO \Rightarrow f \circ F \in BMO$  mit  $\|f \circ F\|_{BMO} \leq c_A \|f\|_{BMO}$

Ist umgekehrt  $F$  ein Homeomorphismus mit  $\|f \circ F\|_{BMO} \leq c_A \|f\|_{BMO}$  ( $\forall f \in BMO$ )

$\Rightarrow F$  ist eine quasikonforme Abbildung (d.h.  $F$  erfüllt obige Regularitätsbedingungen)

(Reimann)

B Verschiedenes

6.10 Gibt es neben  $\{I, R_1, \dots, R_n\}$  weitere Familien von singulären Integraloperatoren, die BMO und  $H^1$  charakterisieren?

a) In  $\mathbb{R}^2$  ~~ist~~ <sup>erhalten</sup>  $R := R_1 + iR_2$  und  $I$  (d.h.  $\{I, R\}$ ) diese Aufgabe, jedoch nicht  $\{I, R^2\}$ .  
 In  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) gibt es analoge Systeme, die man Spinoren nennt.

b) Seien  $T_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) singuläre Integraloperatoren mit  $T_j f = K_j * f$ , wo  $K_j = m_j$  homogen vom Grade 0 und  $C^\infty$  abseits des Ursprungs.

Dann gilt: die Vektoren  $(m_1(\xi), \dots, m_N(\xi))$  und  $(m_1(-\xi), \dots, m_N(-\xi))$  sind  $\forall \xi \neq 0$  linear unabhängig voneinander  $\Rightarrow \{T_1, \dots, T_N\}$  charakterisiert BMO und  $H^1$

c) Obige Bedingung ist auch hinreichend, d.h., wenn  $\{T_1, \dots, T_N\}$  BMO <sup>v.H.</sup> charakterisieren, so sind  $(m_1(\xi), \dots, m_N(\xi))$  und  $(m_1(-\xi), \dots, m_N(-\xi))$   $\forall \xi \neq 0$  lin. unabh. voneinander (hier braucht man die quasorthogonalen Entwicklungen von BMO-Funktionen)

6.11 Komplexe Interpolation der  $H^p$ -Räume: gegeben seien  $0 < p_0 < p_1 < \infty$ , so daß  $\forall s \in S$  (d.h.  $0 < \text{Re}(s) < 1$ )  $T_s$  durch  $T_s: H^{p_0} \cap H^{p_1} \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  definiert ist.

Weder sei  $T_s$  in  $s \in S$  stetig und beschränkt und im Interior analytisch (in dem Sinne, den die Eigenschaften für die Abb.  $s \mapsto \int (T_s f)(x) g(x) dx$  gilt, wo  $f \in H^{p_0} \cap H^{p_1}$ ,  $g$  beschr. mit kompaktem Träger). Weder soll  $T_s$  folgende Schranken erfüllen:

$$\|T_s f\|_{L^q} \leq A \|f\|_{H^{p_0}} \quad \text{Re}(s) = 0 \quad \text{und} \quad \|T_s f\|_{L^q} \leq A \|f\|_{H^{p_1}} \quad \text{Re}(s) = 1$$

Dann ist  $\|T_\theta f\|_{L^q} \leq A_\theta \|f\|_{H^{p_\theta}}$   $\forall 0 < \theta < 1$  mit  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$  und  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

6.12 Die "normale" atomare Zerlegung gilt zwar nur für  $H^p$  mit  $0 < p \leq 1$ , doch gibt es einen brauchbaren Ersatz für  $1 < p < \infty$

Sei dazu  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , dann gibt es Kugeln  $B_n$ , Koeffizienten  $\lambda_n$  und Funktionen  $f_n$  mit  $f = \sum f_n$ ,  $\int f_n dx = 0$ ,  $|f_n| \leq \lambda_n \chi_{B_n}$  und  $\|\sum \lambda_n \chi_{B_n}\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_{L^p}$  (Uchiyama)

6.13 (Zur Nicht-Entartungs-Bedingung)

Gibt es Paare  $(\Phi, \Psi)$ , die  $\int_0^\infty \frac{\Phi_t + \Psi_t}{t} dt = \delta$  in  $\mathcal{S}'$  erfüllen?

a) Sei  $\exists \Phi \in \mathcal{S}$  mit  $\int \Phi = 0$ . Dann ist  $\Phi$  genau dann nicht entartet (d.h.  $\exists \Psi \in \mathcal{S}$  mit  $\int \Psi = 0$ , sodass  $\int \frac{\Phi_t + \Psi_t}{t} dt = \delta$ ), wenn  $\hat{\Phi}$  auf keinem Strahl durch den Ursprung identisch verschwindet, (d.h.  $\forall \xi \neq 0 \exists t > 0$  mit  $\hat{\Phi}(t\xi) \neq 0$ ).

Beweis "⇒" folgt aus FT von  $t = \int \hat{\Phi}(t\xi) \hat{\Psi}(t\xi) \frac{dt}{t}$  und dem <sup>skal-</sup> inversen Maß  $\frac{dt}{t}$ .  
 "⇐"  $\exists \psi \in C_c^\infty$ , die nahe dem Ursprung verschwindet so, dass  $|\hat{\Psi}(\xi)|^2 \psi(\xi)$  auf keinem Strahl durch den Ursprung verschwindet. Dann setzt man  $\hat{\Psi}(\xi) = \frac{\hat{\Phi}(\xi) \psi(\xi)}{h(\xi)}$  und  
 $\forall \xi \neq 0 \neq h(\xi) = \int_0^\infty |\hat{\Phi}(t\xi)|^2 \psi(t\xi) \frac{dt}{t} \quad \hat{\Psi}(t\xi) \hat{\Phi}(t\xi) \psi(t\xi) |\hat{\Phi}(t\xi)|^2 \psi(t\xi) \left( \int_0^\infty \frac{dt'}{t'} |\hat{\Phi}(t't\xi)|^2 \psi(t't\xi) \right)^{-1} = 1$   
 $\int \frac{dt'}{t'} |\hat{\Phi}(t't\xi)|^2 \psi(t't\xi)$

b)  $\Phi$  ist insb. nicht entartet, wenn  $\Delta \Phi \neq 0$  und  $\Phi$  radial ist  
 ⇒ wähle dann  $\Psi = c \Phi$  für ein geeignetes  $c$

c) Ist  $\Phi = \frac{\partial P_t}{\partial t} \Big|_{t=1}$ , so gilt obige Identität für  $\Psi = \Phi$ , da  $\hat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t |\xi|^2}$   
 $\hat{\Phi} = -4\pi |\xi|^2 e^{-2\pi |\xi|^2} \quad \hat{\Psi} = -4\pi |\xi|^2 e^{-2\pi |\xi|^2}$

$$\Rightarrow 16\pi^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^2 |\xi|^2 e^{-4\pi |\xi|^2 \cdot t} = 1$$

d) Ist  $\Phi \in L^1$  radial,  $\hat{\Phi}(\xi) > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^n$  und  $N$  gegeben, so gibt es  $\Psi \in C_c^\infty$  mit  $\text{supp } \Psi \subseteq B_2(0)$  und  $\Psi$  erfüllt die cancellation-Eigenschaften  $\int x^\alpha \Psi dx = 0 \forall 0 \leq |\alpha| \leq N$  so, dass  $\int_0^\infty \frac{dt}{t} \Phi_t + \Psi_t = \delta$   
 Sei in der Tat  $\Psi'$  eine beliebige  $C_c^\infty$ -Funktion mit  $\text{supp } \Psi' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \frac{1}{2}\}$  mit obigen cancellation-Eigenschaften, so können wir  $\Psi = c \Psi' * \Psi$  für geeignetes  $c$  wählen.

